TD Déterminant

`KFW` **Exercice 1** Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants : **Ind** : *Utiliser des opérations sur lignes.*

1. $\begin{vmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$, où $\omega = e^{2i\pi/3}$
2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & a+c \\ ab & bc & ac \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} \cos a & \cos(a+k) & \cos(a+2k) \\ \cos b & \cos(b+k) & \cos(b+2k) \\ \cos c & \cos(c+k) & \cos(c+2k) \end{vmatrix}$

Calculs

`MA8` **Exercice 2** Calculer les déterminants de taille n : $V_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ et $V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

`FKB` **Exercice 3** On considère la matrice de permutation $M_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)$. Calculer $\det M_\sigma$.

`SI9` **Exercice 4** Soit $M = \begin{pmatrix} c_1 & a & \cdots & a \\ b & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & c_n \end{pmatrix}$ et H la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que l'application $f\colon x \mapsto \det(M + xH)$ est un polynôme degré ≤ 1.
2. Calculer $f(-b)$ et $f(-a)$.
3. Si $a \neq b$, en déduire $\det M$.
4. Déterminer $\det M$ si $a = b$.

`Y04` **Exercice 5** Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, puis, en utilisant la n-linéarité de det, celui de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

`LSC` **Exercice 6** Soit $n \geq 2$. Montrer que le déterminant de $\begin{pmatrix} z & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & z & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & z & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & z + a_{n-1} \end{pmatrix}$ est égal à $z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$

`T04` **Exercice 7** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in [-2, 2]$. On pose $d_n = \det(xI_n - A)$.

1. Par convention, $d_0 = 1$ et $d_1 = x$. Montrer que $d_{n+2} = x d_{n+1} - d_n$.
2. On pose $x = 2\cos\theta$. Montrer que si $\theta \not\equiv 0[\pi]$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n,\ d_n = \alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta}$. En déduire que

$$d_n = \frac{\sin\left((n+1)\theta\right)}{\sin\theta} \text{ si } \theta \not\equiv 0[\pi].$$

`2N0` **Exercice 8** Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_2 & \ddots & \ddots & x_1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_0 \end{pmatrix}$.

1. Donner une expression de A en fonction de la matrice $J = (\delta_{j \equiv i+1[n]})$ et de ses puissances.
2. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, soit $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et $X_k = (\omega_k^i)_{i \leq n-1} \in \mathbb{C}^n$. Calculer AX_k, en fonction du polynôme $P = \sum_{i=0}^{n-1} x_i X^i$.
3. ★ En déduire que $\det A = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k)$.

`J7U` **Exercice 9** Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

1. Donner la valeur de $\det \left(x_i^{j-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.
2. Soient $(P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ une famille de polynômes unitaires avec $\deg P_i = i - 1$. Calculer $\det\left(P_j(x_i)\right)$.
   Indication : *On a* $\mathrm{Vect}(P_1, \dots, P_k) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$. *Faire des opérations sur les colonnes.*
3. Calculer $\det\left(\cos((j-1)x_i)\right)_{i,j \leq n}$

`HHY` **Exercice 10** ★ Déterminant de Cauchy Soient $(\alpha_i)_{i \leq n}$, et $(\beta_i)_{i \leq n}$ des complexes, avec $\alpha_i + \beta_j \neq 0$. Calculer $\det \left(\frac{1}{\alpha_i + \beta_j}\right)_{i,j \leq n}$.

Générique

`5LM` **Exercice 11** Soit $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{K})$ une matrice antisymétrique. Montrer que A n'est pas inversible.

`CCJ` **Exercice 12** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que n est pair.

`WA8` **Exercice 13** Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente.

1. Déterminer $\det N$. *Dans la suite, on admet que N est semblable à une matrice triangulaire supérieure T.*
2. Déterminer les coefficients diagonaux de T, puis calculer $\det(I_n + N)$.
3. Soit U inversible commutant avec N. Montrer que $\det(U + N) = \det U$.

069 **Exercice 14** 🍃

1. Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(A+M) = \det A + \det M$.
   a) Montrer que A est non inversible.
   b) Soit C une colonne non nulle de $\mathbb{K}^n$. Montrer qu'il existe une matrice M inversible dont la i-ième colonne est C.
   c) Montrer que si A est non nulle, il existe M inversible telle que $A+M$ ne soit pas inversible.
   d) Que dire de A ?
2. En déduire que si pour toute matrice M, $\det(A+M) = \det(B+M)$, alors $A = B$.

304 **Exercice 15**

1. Soient $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $x \mapsto \det(U+xV)$ est une fonction polynomiale en x, et (★) que son degré est $\leq \operatorname{rang} V$.
2. Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables sur $\mathbb{C}$, alors elles sont semblables sur $\mathbb{R}$.
   Indication : *Écrire la relation de conjugaison, avec $P = P_1 + iP_2$.*

2GY **Exercice 16** Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si les coefficients de $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont (en valeur absolue) $\leq \varepsilon$, alors $I_n + B$ est inversible.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe $\varepsilon' > 0$ tel que si les coefficients de B sont $\leq \varepsilon$, alors $A+B$ est inversible.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r. Montrer qu'il existe $\varepsilon'' > 0$ tel que si les coefficients de B sont $\leq \varepsilon$, alors $\operatorname{rang}(A+B) \geq r$.

EDF **Exercice 17** ★ [Oral X] Soit n pair et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. On suppose que les coefficients diagonaux de M sont nuls, et que les autres valent ± 1. Montrer que M est inversible.

Endomorphismes

9DL **Exercice 18** 🍃 Déterminer le déterminant et la trace des endomorphismes de $\mathbb{C}_n[X]$ suivant :

1. $\Delta\colon P \mapsto P(X+1) - P(X)$
2. $\tau\colon P \mapsto P(X+1)$

UKB **Exercice 19** Soit E un espace de dimension n, F un sous-espace vectoriel de E et s une symétrie par rapport à F. Que dire de $\det s$?

RVS **Exercice 20** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $\varphi_A\colon B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AB$. Déterminer $\det \varphi_A$.

Déterminants par blocs

7BJ **Exercice 21** 🍃 Déterminer le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ donnée par blocs $\begin{pmatrix} O_n & I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$.

DUE **Exercice 22** Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec A inversible.

1. Montrer que $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B)$.
2. Montrer que si $AC = CA$, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)$.

Comatrice

LXR **Exercice 23** 🍃 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

1. On suppose que $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\operatorname{Com}(AB) = \operatorname{Com}(A)\operatorname{Com}(B)$.
2. ★ Montrer que pour λ assez proche de 0, $A - \lambda I_n$ est inversible. En déduire que $\operatorname{Com}(AB) = \operatorname{Com}(A)\operatorname{Com}(B)$.
3. En déduire que si A, B sont semblables, $\operatorname{Com}(A)$ et $\operatorname{Com}(B)$ le sont également.

0Q1 **Exercice 24** ♣ On note $GL_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid A \text{ inversible et } A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})\}$. Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det A = \pm 1$.

PCF **Exercice 25** ★ [Oral X] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Discuter du rang de $\operatorname{Com} A$.

Autres

2M3 **Exercice 26** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on considère l'application $f_A\colon C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \sum_{j=1}^{n} \det(C_1 \mid \dots \mid C_{j-1} \mid AC_j \mid \dots \mid C_n)$ où les C_i désignent les colonnes de la matrice C. Montrer que $f_A = \operatorname{Tr}(A)\det$.

Indication : $\det$ *est l'unique forme n-linéaire alternée…*

44Q **Exercice 27** Nombre de dérangements On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{D}_n^+ = \mathcal{D}_n \cap \mathcal{A}_n$ et $\mathcal{D}_n^- = \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_n^+$.

1. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \left|\mathcal{D}_k\right| \binom{n}{k}$.
2. En déduire une expression explicite de $\left|\mathcal{D}_n\right|$ comme une somme.
   Indication : *Écrire la relation précédente matriciellement, et l'inverser (exprimer les D_k en fonction des $k!$).*
3. Calculer $\left|\mathcal{D}_n^+\right| - \left|\mathcal{D}_n^-\right|$. En déduire $\left|\mathcal{D}_n^+\right|$.

E7U **Exercice 28** ★ On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

1. Montrer que $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections.
2. En déduire que $SL_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs, c'est-à-dire que si $A, B \in SL_n(\mathbb{K})$, il existe une fonction $\gamma\colon [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ continue, telle que $\gamma(0) = A$, $\gamma(1) = B$ et $\forall t,\ \gamma(t) \in SL_n(\mathbb{K})$.

1A8 **Exercice 29** ★ [ENS] Soit E de dimension d. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur E.